

**Série N°:13**

(suite Arithmétique)

**EXERCICE N°1:**

Soit la suite  $u$  définie par :  $u_n = \frac{4n+8}{n^2+1}$

1/ calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_5$ .

2/ a- Trouver l'entier  $n$  tel que :  $u_n = 2$ .

b- Dédire que pour tout  $n \geq 4$  ; on a :  $u_n < 2$ .

3/ a- Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$  et montrer que :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-4(n^2+5n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$

b- Dédire que :  $u_{n+1} < u_n$ .

**EXERCICE N°2:**

Soit la suite  $u$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ a- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b- Dédire que  $u_n$  n'est pas une suite arithmétique.

2/ Soit la suite  $v$  définie par  $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que  $v_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 1$ .

3/ a- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b- En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4/ Calculer  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{15}$ .

**EXERCICE N°3:**

Soit  $u$  une suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{1 + u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Calculer  $u_1$  et  $u_2$  et vérifier que  $u_n$  n'est pas une suite arithmétique.

2/ Soit la suite  $v$  définie par :  $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a- Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

b- Dédire que  $v_n$  est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son premier terme  $v_0$ .

c- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3/ a- Vérifier que :  $u_n = \frac{v_n + 1}{v_n - 1}$

b- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE N°4 :**

Soit  $u$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1}^2 - u_n^2 = 4, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1/ Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$  .
- 2/ Vérifier que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite arithmétique.
- 3/ On pose :  $v_n = u_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrer que  $v_n$  est une suite arithmétique dont on précisera sa raison
- 4/ a- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
b- Dédire  $u_n$  en fonction de  $n$  .
- 5/ On pose :  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE N°5 :**

- 1/ Factoriser le trinôme :  $T(x) = x^2 + 3x + 2$ .
- 2/ Soit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = \frac{2n+3}{T(n)}$ 
  - a- Calculer les cinq premiers termes.
  - b- Trouver les réels  $a$  et  $b$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$
  - c- Exprimer  $u_{n+1} - u_n$  à l'aide de  $n$  et montrer que :  $u_{n+1} < u_n$  .
- 3/ Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .
  - a- Calculer  $v_0$  ;  $v_1$  et  $v_2$  .
  - b- Montrer que :  $v_{n+1} - v_n = \frac{2(2n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$
  - c- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $v_{n+1} > v_n$  .
- 4/ Calculer  $S = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{10}$